

УДК 519.688:53.083.98

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОСТРУКТУРЫ ГОДИЧНЫХ СЛОЕВ ДЕРЕВЬЕВ

Ю.В. Волков, В.А. Тартаковский

Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН, г. Томск

E-mail: tv@imces.ru

Рассмотрена математическая модель построения микроструктуры годичных слоев деревьев, применяемая для восстановления биоиндикационной информации. Математическая модель представлена в виде колебаний плотности древесины, обусловленных изменением параметров трахеид в годичных слоях. Составные элементы модели амплитуда и фаза определяют толщину стенки трахеид и радиальный размер соответственно. Приведены результаты численного исследования модели, подтверждающие её непротиворечивость и применимость для анализа экспериментальных данных.

### Ключевые слова:

Биоиндикация, дендрохронология, годичные кольца, сезонный рост, математическая модель, анализ сигналов.

### Введение

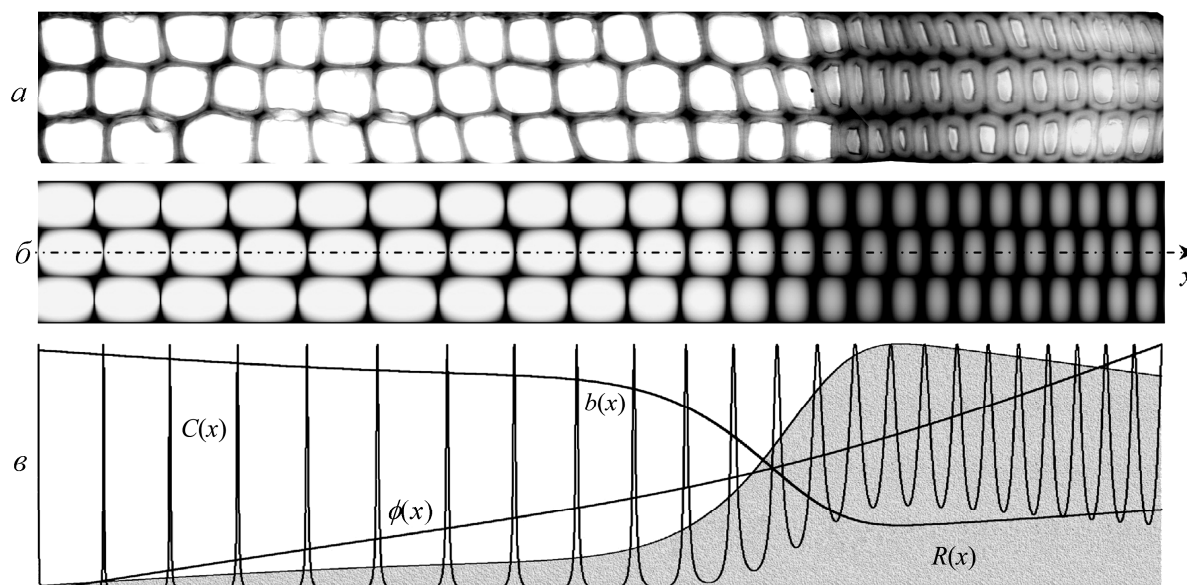
Многочисленные дендрохронологические исследования основываются на измерении ширины годичных колец деревьев, формирование которой происходит под воздействием постоянно изменяющихся параметров окружающей среды. Формирование годичных колец обусловлено ростом трахеид и формированием уникальной клеточной структуры. Трахеиды хвойных деревьев модифицируются, адаптируясь к изменениям окружающей среды в процессе вегетации. Использование для анализа характеристик годичных колец математических методов и построение математических моделей изменчивости прироста деревьев в связи с динамикой внешних условий обеспечивает на современном этапе развитие дендрохронологии как науки [1].

Взаимосвязь между параметрами годичного кольца и параметрами окружающей среды предполагает наличие некоторой количественной зависи-

мости, интегрально учитывающей неоднородность внешних параметров окружающей среды. Работа по выделению подобной зависимости является наиболее актуальной для более точного восстановления климатозоологических данных. Решение данной задачи основано на построении математической модели, соответствующей микроструктуре годичного кольца, позволяющей производить оценку сезонных изменений роста.

### Основные уравнения и оценка модели

При исследовании структуры древесины как физического объекта параметры трахеид измеряются микроскопическими методами. На макроуровне измеримым параметром является размер годичного кольца, который фиксируется детектором как некоторая функция, видоизмененная относительно среднего размера трахеид, образовавшихся за сезон роста [2]. Микрофотография поперечного



**Рис. 1.** Моделирование сезонного изменения трахеид годичного кольца: а – микрофотография поперечного сечения трахеид, б – графическое представление модели поперечного сечения трахеид; в – модель плотности вещества вдоль ряда трахеид, где  $C(x)$  – распределение плотности вещества вдоль ряда трахеид,  $b(x)$  – функция, связанная с толщиной клеточной стенки,  $\phi(x)$  – фаза,  $R(x)$  – распределение вещества в радиальном сечении годичного кольца

среза, представленная на рис. 1, а, характеризует изменение оптической плотности вдоль ряда трахеид. Наблюдаемое распределение вещества вдоль годичного слоя (рис. 1, а) напоминает процессы, происходящие в системах с отрицательной обратной связью. Обратная связь в биологических объектах, например, в дереве, может служить системой биологического регулирования процессов роста трахеид. Применительно к сигналу, соответствующему изменению оптической плотности в ряде трахеид (рис. 1, а, б), обратная связь будет являться стабилизирующим фактором протекания процессов [3].

При построении математической модели входной сигнал примет вид  $1-b(x)$ , а передаточная функция  $\exp i\phi(x)$ , тогда модель микроструктуры годичного кольца, характеризующую изменение оптической плотности в ряде трахеид, можно представить в следующем виде:

$$C(x) = \left| \frac{1-b(x)}{1-b(x)\exp i\phi(x)} \right|^2 = \frac{(1-b(x))^2}{1-b(x)^2 - 2b(x)\cos\phi(x)}, \quad (1)$$

где  $C(x)$  – функция представляющая распределение плотности вещества вдоль ряда трахеид,  $b(x)$  – функция связанная с толщиной клеточной стенки, которая уменьшается с ростом  $b(x)$  в интервале  $(0, 1)$ ,  $\phi(x)$  – фаза, являющаяся монотонной функцией и определяющая радиальный размер трахеиды. При возрастании фазы размер трахеид уменьшается.

Из рис. 1, б, видно, что основные структуры трахеид воспроизводятся моделью (1) адекватно натуральному изображению, рис. 1, а.

Из выражения (1) следует, что параметры трахеид контролируются входными воздействиями  $b(x)$  и  $\phi(x)$  – в обычных условиях гладкими функциями, описывающими процесс модуляции [4, 5].

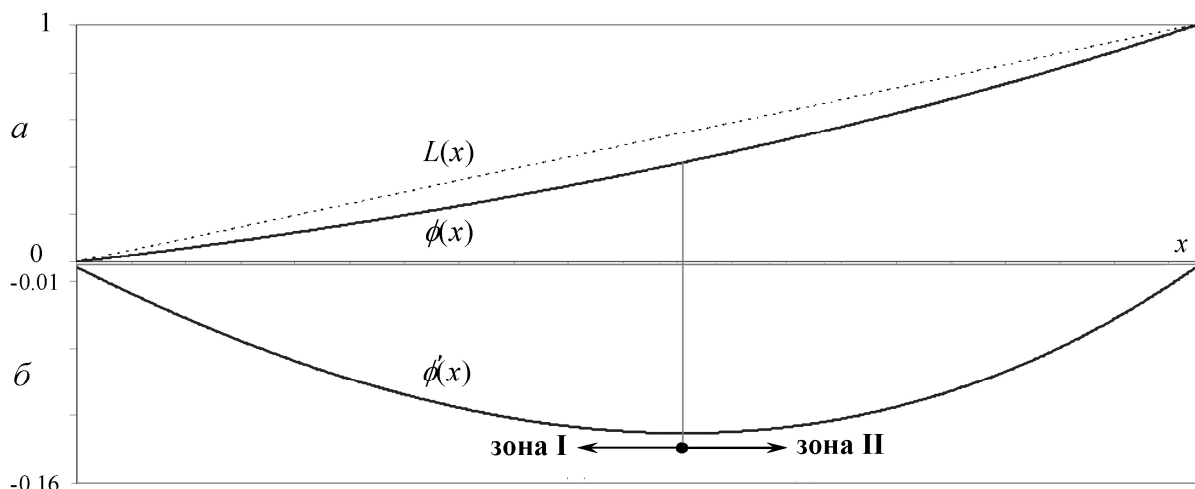
Информация о состоянии окружающей среды и о внутренних процессах в дереве включена в эти входные воздействия. В рамках модели они являются независимыми величинами, но их взаимосвязь возникает вне модели, как результат оптимизации проводящей и опорной функций ствола [6].

Под воздействием входных функций знакопеременное колебание  $b(x)\exp i\phi(x)$  может обеспечивать переключение процессов роста, что соответствует переходу от формирования ранней к формированию поздней древесины, характеризующемуся изменением радиального размера клеток и толщины клеточной стенки [1, 6]. Подобные функциональные изменения, запрограммированные в росте дерева, отражает функция фазы  $\phi(x)$  (рис. 1, а), преобразованная в функцию  $\phi'(x)$  (рис. 1, б) путем вычитания линейной зависимости  $L(x)$ , проведенной через начальную и конечную точки функции  $\phi(x)$ . На границе, характеризующей сезонные изменения роста, производная функции  $\phi'(x)$  изменяет знак.

Пусть радиальный размер трахеид достаточно мал, такой, что в пределах трахеиды  $\phi(x) = 2\pi nx$ , где  $n=1,2,\dots$ , а  $b(x) = b_n = \text{const}$ . При этих условиях получено аналитическое выражение для количества вещества в радиальном сечении трахеид:

$$R_n = 2 \int_0^{\frac{n}{2}} C(x) dx = \frac{2(1-b_n)}{\pi n(1+b_n)} \arctg \left( \frac{1+b_n}{1-b_n} \operatorname{tg}(\pi nx) \right) \bigg|_0^{\frac{n}{2}} = \frac{1-b_n}{n(1+b_n)}. \quad (3)$$

Экспериментально наблюдается сглаженное распределение вещества в радиальном сечении годичного кольца  $R(x)$  (рис. 1, б), высокочастотные составляющие функции  $C(x)$  подавляются сверткой с апертурой детектора  $\Omega(x)$ , в результате чего выражение (3) примет следующий вид:



**Рис. 2.** Анализ сезонных изменений роста: а – функция фазы  $\phi(x)$ , отражающая функциональные отклонения, запрограммированные в сезонных изменениях роста дерева, от равномерного формирования трахеид  $L(x)$ , б – функция  $\phi'(x)$  отсоединения сезонных изменений роста и перехода от ранней (зона I) к поздней (зона II) древесины

$$R(x) = C(x) \otimes \Omega(x) \approx \frac{1-b(x)}{1+b(x)}. \quad (4)$$

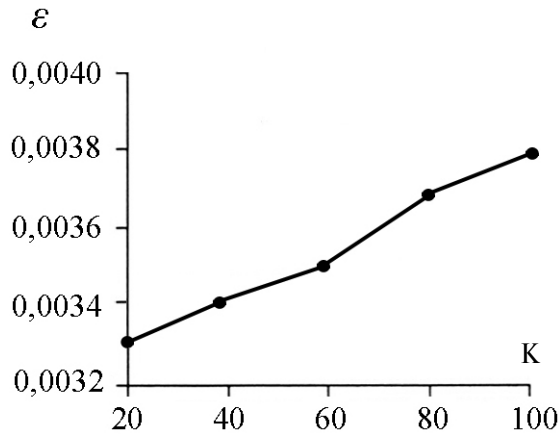


Рис. 3. Оценка среднеквадратической ошибки восстановления нормированной функции  $R(x)$  при изменении количества трахеид в годичном кольце  $K$  от 20 до 100

В замкнутом численном эксперименте было установлено, что при изменении числа трахеид в годичном кольце  $K$  от 20 до 100, соотношение (4) выполняется с погрешностью меньше 0,004 (рис. 3). Выборочный ансамбль для данного эксперимента состоял из 10 разных реализаций модельного сигнала с индивидуальной для каждого сигнала фазой. Для этих сигналов изменялось число периодов, соответствующих изменению количества трахеид в годичном слое от 20 до 100 с шагом 20. Оценка нормированной среднеквадратической ошибки восстановления вычислялась по формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (R_i - R_{ei})^2}{n}}, \quad (5)$$

где  $R_i$  – восстановленная и  $R_{ei}$  – исходная функции,  $n$  – количество сигналов.

Таким образом, выражение (4) достаточно точно определяет распределение вещества по сечению годичного кольца и связывает это распределение с функцией  $b(x)$ , которая управляет толщиной стенки трахеиды. Этот результат соответствует известным экспериментальным данным [1. С. 49].

Для оценки статистической устойчивости математической модели (1) проведен замкнутый численный эксперимент, для реализации которого был построен модельный сигнал, соответствующий ряду трахеид (рис. 1, в). На модельный сигнал накладывался равномерный аддитивный шум. Восстанавливаемой составляющей модели являлась фаза колебания, определяющая динамику роста клеток.

Выборочный ансамбль состоял для всех экспериментов из 10 разных реализаций сигналов для каждого уровня шума. Оценка среднеквадратической ошибки восстановления фазы рассчитывалась в соответствии с выражением (5) при изменении отношения шума к сигналу от 0,1 до 0,5 с шагом 0,1.

Отдельные контрольные эксперименты с большим объемом выборки (более 100 разных реализаций сигналов) показали, что среднее и дисперсия, полученных оценок остаются неизменными, что было расценено как наличие статистической устойчивости. При данном объеме выборки в силу центральной предельной теоремы среднее арифметическое значение будет распределено по закону, близкому к нормальному. Для статистического эксперимента представляют интерес случаи с малым среднеквадратичным отклонением, что означает устойчивость алгоритма оценивания к входным параметрам, вследствие этого среднее арифметическое как оценка ошибки  $\varepsilon$  будет близко к оценке максимального правдоподобия.

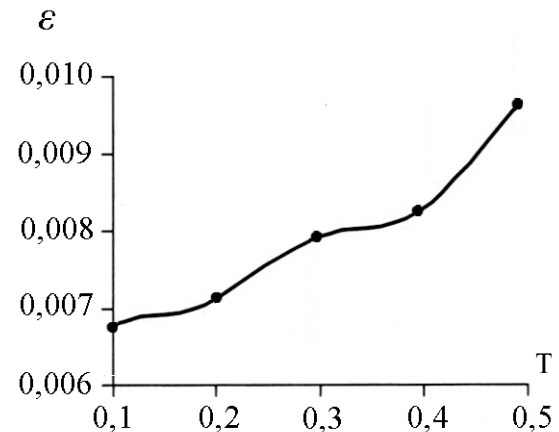


Рис. 4. Оценка среднеквадратической ошибки восстановления нормированной функции фазы  $\phi(x)$  при изменении уровня аддитивного шума,  $T$

Эксперимент показал, что при демодуляции в условиях действия равномерного шума со среднеквадратичным отклонением 0,5 функция фазы восстанавливается с погрешностью менее 0,01 (рис. 4).

Модельные условия, созданные в замкнутом численном эксперименте, и его результаты позволяют говорить о возможности использования модели (1) для изучения особенностей формирования рядов трахеид за вегетационный период, а также применимости модели для разработки на ее основе численных алгоритмов, позволяющих производить восстановление параметров роста трахеид из натуральных образцов.

Практическая значимость математической модели основывается на формализме составляющих модель функций и существующих взаимосвязях, позволяющих определять физический или биологический смысл подтверждаемый экспериментально. В представленной модели (1) таковыми являются функции  $b(x)$  и  $\phi(x)$ . В силу своей гладкости и распределённости по всему сезону роста они более удобны для экспериментального исследования и несут больший объем полезной информации [2], нежели традиционные микроскопические дискретные параметры клеток. Однако функция  $\phi(x)$  недоступна для изучения на уровне годичного кольца, как это следует из (4), поэтому полный экс-

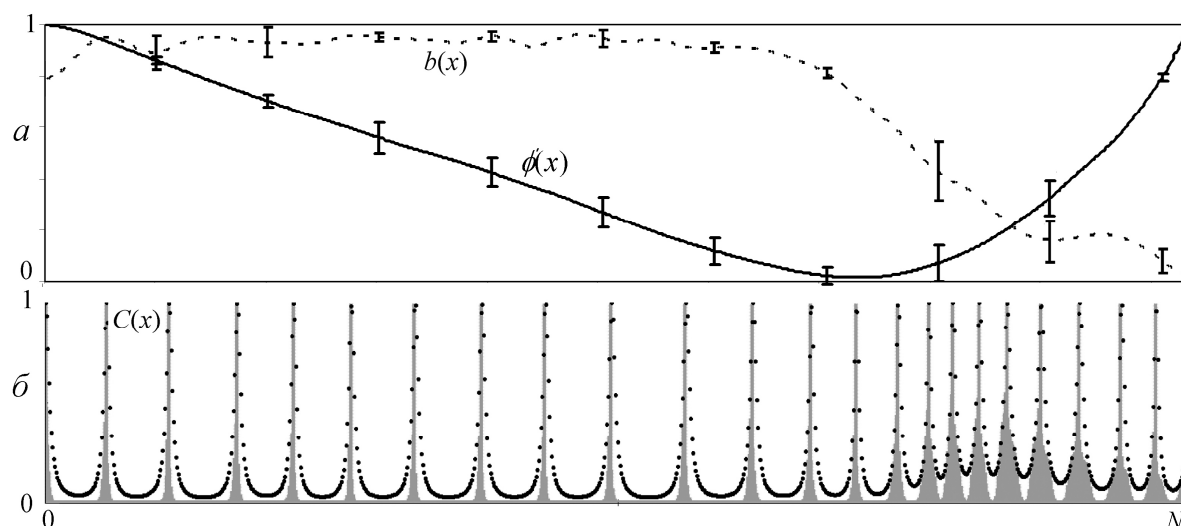


Рис. 5. Анализ микрофотографий трахеид: а – восстановленные функции: амплитуда  $b(x)$ , фаза  $\phi(x)$ , б – экспериментальная плотность вещества трахеид (серый тон), восстановленная плотность вещества трахеид  $C(x)$  (пунктир)

перимент должен включать микроденситометрирование срезов трахеид для получения распределения их вещества, с последующей демодуляцией полученных данных в соответствии с выражением (1).

#### Натурный эксперимент

В натурном эксперименте обрабатывались микрофотографий трахеид сосны (*Larix sibirica* Ledeb.), соответствовавшие годичным слоям разных лет и разных деревьев. Общий объем выборки натуральных сигналов состоял из 60 различных рядов трахеид.

В результате реализации алгоритма восстановления исследуемых функции по натурным образцам выделялся исходный сигнал, соответствующий оптической плотности вещества трахеид, подвергаемый фильтрации и вычислению основных частотных составляющих сигнала, соответствующих периодичности колебанию плотности в ряде трахеид. Функции фазы  $\phi(x)$  и амплитуды  $b(x)$  вычислялись, как составляющие математической модели (1), в соответствии с известным математическим аппаратом [6]. По восстановленным функциям  $b(x)$  и  $\phi(x)$

определялась плотность  $C(x)$  (рис. 5, б), которая, в свою очередь, сравнивалась с исходной экспериментальной плотностью. Совпадение исходной и восстановленной функций оценивалось коэффициентом корреляции.

#### Заключение

Полученные результаты (рис. 5, а) отражают наличие закономерности формирования функции  $\phi(x)$  и  $b(x)$  для всей выборки натуральных сигналов. Низкий уровень дисперсии полученных функций относительно средних оценок подтверждает устойчивость и применимость модели (1) к работе с натурными образцами.

Наименьшее значение коэффициента корреляции, равное 0,76, для всего выборочного ансамбля характеризует разработанную математическую модель, как достаточно точно описывающую наблюдаемый биоиндикационный объект, что позволяет говорить о применимости составляющих модель функций для более точного формального описания биоиндикационных процессов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ваганов Е.А., Шашкин А.В. Рост и структура годичных колец хвойных. – Новосибирск: Наука, 2000. – 232 с.
2. Тартаковский В.А., Волков Ю.В., Исаев Ю.Н., Несветайло В.Д., Попов В.Н. Математическая модель радиального сечения годичных колец деревьев // Автотометрия. – 2003. – № 5. – С. 118–127.
3. Малиновский А.А. Типы управляющих биологических систем и их приспособительное значение // Проблемы кибернетики. – 1961. – № 4. – С. 151–181.
4. Тартаковский В.А. Условия причинности и демодуляция оптических сигналов с монотонной фазой // Оптика атмосферы и океана, – 2002. – Т. 15. – № 1. – С. 91–100.
5. Doroslovacki M.I. On nontrivial analytic signals with positive instantaneous frequency // Signal Processing. – 2003. – № 83. – P. 655–658.
6. Тартаковский В.А., Волков Ю.В. Математическая модель годичных колец деревьев на микро- и макроуровне // Новые методы в дендрозкологии / Под ред. В.И. Воронина. – Иркутск: Изд-во Ин-та географии им. В.Б. Сочавы СО РАН, 2007. – С. 150–152.
7. Cohen L., Loughlin P., Vakman D. On an ambiguity in the definition of the amplitude and phase of a signal // Signal Processing. – 1999. – № 79. – P. 301–312.

Поступила 07.04.2009 г.